अध्याय 14

# गणितीय विवेचन

## 14.1 समग्र अवलोकन (Overview)

यदि कोई वस्तु या तो काली है या सफ़ेद है और यदि वह काली नहीं है, तो तर्क (logic) हमें इस निष्कर्ष की ओर प्रेरित करता है कि वह वस्तु निश्चित ही सफ़ेद है। ध्यान दीजिए कि प्रदत्त परिकल्पना (hypotheses) से तार्किक विवेचन, यह उद्घाटित (reveal) नहीं कर सकता कि 'काली' या 'सफ़ेद' का अर्थ क्या है या कोई वस्तु दोनों ही क्यों नहीं हो सकती है? वस्तुत: तर्कशास्त्र किसी विशेष अर्थ अथवा संदर्भ के उल्लेख किए बिना, विवेचन के व्यापक (general) प्रतिरूप (पैटर्न) का अध्ययन है।

### 14.1.1 *कथन (Statements)*

कथन एक वाक्य है जो या तो सत्य होता है या असत्य परन्तु एक ही साथ दोनों नहीं होता है।

*टिप्पणी: कोई वाक्य कथन नहीं हो सकता यदि*

(i) वह विस्मयादिबोधक है
(ii) वह एक आदेश या प्रार्थना है
(iii) वह प्रश्नवाचक है
(iv) उसमें अनिश्चित समय जैसे 'आज', 'कल', 'बीता हुआ' आदि का उल्लेख है।
(v) उसमें अनिश्चित स्थान जैसे 'यहाँ', 'वहाँ', 'सभी जगह (सर्वत्र)' आदि का उल्लेख होता है।
(vi) उसमें सर्वनाम जैसे 'वह', 'वे' आदि का उल्लेख है।

**उदाहरण 1**

(i) वाक्य "नई दिल्ली भारत में है।" सत्य है। अत: यह एक कथन है।

(ii) वाक्य "प्रत्येक आयत एक वर्ग है।" असत्य है। अत: यह एक कथन है।

(iii) वाक्य "दरवाज़ा बंद कीजिए।" को सत्य या असत्य निर्धारित नहीं किया जा सकता है (वस्तुत:, यह एक आदेश है)। अत: इसे कथन नहीं कहा जा सकता है।

(iv) वाक्य "आपकी आयु कितनी है?" को सत्य या असत्य निर्धारित नहीं किया जा सकता है (वस्तुत:, यह प्रश्नवाचक है)। अत: यह एक कथन है।

(v) वाक्य "$x$ एक प्राकृत संख्या है।" की सत्यता या असत्यता $x$ के मान पर निर्भर है। अत: इसे एक कथन नहीं माना (समझा) जा सकता है। तथापि (however) कुछ पुस्तकों में इसे मुक्त (open) कथन कहा गया है।

*टिप्पणी : किसी कथन की 'सत्यता' या 'असत्यता' को उसका सत्यमान (Truth value) कहते हैं।*

**14.1.2 सरल कथन (*Simple statement*)** एक कथन सरल कथन कहलाता है, यदि उसे दो या दो से अधिक कथनों में खण्डित नहीं किया जा सकता है।

**उदाहरण 2** कथन '2 एक सम संख्या है।', 'किसी वर्ग की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।' और 'चंडीगढ़, हरियाणा की राजधानी हैं।' सभी एक सरल कथन हैं।

**14.1.3 *संयुक्त कथन* (*Compound statements*)** एक संयुक्त कथन वह है, जो दो या दो से अधिक सरल कथनों से मिल कर बना होता है।

**उदाहरण 3** कथन 'संख्या 11 विषम तथा अभाज्य दोनों ही है।' को दो सरल कथनों '11 एक विषम संख्या है।' तथा ''11 एक अभाज्य संख्या है।'' में खण्डित किया जा सकता है। अत: यह एक संयुक्त कथन है।

*टिप्पणी : वे सरल कथन, जिनके संयोजन से एक संयुक्त कथन बनता है, संयुक्त के घटक (Component) कथन कहलाते हैं ।*

**14.1.4 *आधारभूत (आधारीय) तार्किक संयोजक* (*Basic logical connectives*)** सरल कथनों को मिलाकर नए कथनों या संयुक्त कथनों की रचना करने की अनेक विधियाँ हैं। वे शब्द जो सरल कथनों को सम्मिलित या परिवर्तित करके नए कथनों या संयुक्त कथनों की रचना करते हैं, संयोजक कहलाते हैं। आधारीय संयोजक (तार्किक) 'संयोजन (conjunction)' अंगरेज़ी शब्द and (और) के संगत है; 'वियोजन (disjunction)' शब्द 'or (या)' के संगत है तथा 'निषेधन (negation)' शब्द 'not (नहीं)' के संगत है।

हम संयोजन को व्यक्त करने के लिए प्रतीक '$\wedge$' वियोजन को व्यक्त करने के लिए प्रतीक '$\vee$' तथा निषेधन को व्यक्त करने के लिए प्रतीक '$\sim$' का प्रयोग आद्योपान्त (throughout) करते रहेंगे।

*टिप्पणी: निषेधन को एक संयोजक कहते हैं, यद्यपि यह दो या दो से अधिक कथनों को मिलाता नही है। वास्तव में यह किसी कथन का केवल रूपान्तरण (modification) कर देता है।*

**14.1.5 *संयोजन* (*Conjunction*)** यदि दो सरल कथन $p$ तथा $q$ शब्द 'और (and)' द्वारा सम्बद्ध हों, तो परिणामी संयुक्त कथन "$p$ और $q$" को $p$ तथा $q$ का संयोजन कहते हैं तथा इसे प्रतीकात्मक रूप में "$p \wedge q$" लिखते हैं।

**उदाहरण 4** निम्नलिखित सरल कथनों का संयोजन कीजिए।

$p$ : दिनेश एक लड़का है।

$q$ : नगमा एक लड़की है।

**हल** कथन $p$ तथा $q$ का संयोजन

$p \wedge q$ : दिनेश एक लड़का है और नगमा एक लड़की है। के द्वारा व्यक्त होता है।

**उदाहरण 5** निम्नलिखित कथन का प्रतीकात्मक रूप में अनुवाद कीजिए:

"जैक और जिल पहाड़ी के ऊपर गए।"

**हल** प्रदत्त कथन निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

"जैक पहाड़ी के ऊपर गया और जिल पहाड़ी के ऊपर गई।"

मान लीजिए कि $p$ : जैक पहाड़ी के ऊपर गया। तथा $q$ : जिल पहाड़ी के ऊपर गई। तब प्रतीकात्मक रूप में दिया गया कथन $p \wedge q$ है।

दो सरल कथनों $p$ तथा $q$ के संयोजक $p \wedge q$ के सत्यापन के संबंध में निम्नलिखित नियम हैं:

($D_1$) : कथन $p \wedge q$ का सत्यामान $T$ (सत्य) होता है, जब-जब (whenever) $p$ तथा $q$ दोनों के सत्यमान T होते हैं।

($D_2$) : कथन $p \wedge q$ का सत्यमान $F$ (असत्य) होता है, जब-जब या तो $p$ या $q$ या दोनों के सत्यमान $F$ होते हैं।

**उदाहरण 6** निम्नलिखित चार कथनों में से प्रत्येक का सत्यमान लिखिए:

(i) दिल्ली भारत में है और $2 + 3 = 6$.

(ii) दिल्ली भारत में है और $2 + 3 = 5$.

(iii) दिल्ली नेपाल में है और $2 + 3 = 5$.

(iv) दिल्ली नेपाल में है और $2 + 3 = 6$.

**हल** उपर्युक्त ($D_1$) तथा ($D_2$) को ध्यान में रखते हुए हम देखते हैं कि कथन (i) का सत्यमान F है, क्योंकि कथन "$2 + 3 = 6$" का सत्यमान F है। साथ ही, कथन (ii) का सत्यमान T है, क्योंकि दोनों कथनों "दिल्ली भारत में है।" तथा "$2 + 3 = 5$" के सत्यमान T हैं।

इसी प्रकार दोनों कथनों (iii) तथा (iv) के सत्यमान F हैं।

**14.1.6 *वियोजन (Disjunction)*** : यदि दो सरल कथन $p$ तथा $q$ शब्द 'या (or)', द्वारा सम्बद्ध हों तो परिणामी संयुक्त कथन "$p$ या $q$" को $p$ तथा $q$ का वियोजन कहते हैं तथा इसे प्रतीकात्मक रूप में "$p \vee q$" लिखते हैं।

**उदाहरण 7** निम्नलिखित सरल कथनों के वियोजन की रचना कीजिए:

$p$ : सूर्य चमकता है।

$q$ : वर्षा होती है।

**हल** कथन $p$ तथा $q$ का वियोजन निम्नलिखित प्रकार है:

$p \vee q$ : सूर्य चमकता है या वर्षा होती है।

दो सरल कथन $p$ तथा $q$ के वियोजन के सत्यमान के संबंध में निम्नलिखित नियम हैं:

$(D_3)$ : कथन $p \vee q$ का सत्यमान $F$ होता है जब $p$ तथा $q$ दोनों के सत्यमान $F$ होते हैं।

$(D_4)$ : कथन $p \vee q$ का सत्यमान $T$ होता है, जब या तो $p$ या $q$ या दोनों के सत्यमान $T$ होते हैं।

**उदारहण 8** निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक का सत्यमान लिखिए:

(i) भारत एशिया में हैं या $2 + 2 = 4$.

(ii) भारत एशिया में है या $2 + 2 = 5$.

(iii) भारत यूरोप में है या $2 + 2 = 4$.

(iv) भारत यूरोप में है या $2 + 2 = 5$.

**हल** उपर्युक्त $(D_3)$ तथा $(D_4)$ को ध्यान में रखते हुए हम देखते हैं कि केवल अंतिम कथन का सत्यमान F है, क्योंकि उसके दोनों ही उप-कथनों ''भारत यूरोप में है।'' तथा "$2 + 2 = 5$" के सत्यमान F हैं। शेष (i) से (iii) तक के सभी कथनों का सत्यमान T है, क्योंकि इन कथनों के उप-कथनों में से कम से कम एक का सत्यमान T है।

**14.1.7 *निषेधन (Negation)*** : किसी कथन के असफल होने को व्यक्त करने वाले एक निश्चयात्मक कथन को अथवा किसी कथन के खण्डन (अस्वीकृति) को उस कथन का निषेधन कहते हैं। किसी कथन के निषेधन की रचना सामान्यत: उस कथन में किसी उपयुक्त स्थान पर शब्द ''नहीं'' की प्रविष्टि द्वारा अथवा उस कथन के पहले (प्रारंभ में) कथन ''यह वस्तुस्थिति नहीं है कि'' अथवा ''यह असत्य है कि'' को लगा कर लिया जाता है।

किसी कथन $p$ के निषेधन को प्रतीकात्मक रूप में "$\sim p$" लिखते हैं।

**उदाहरण 9** कथन '$p$ : नई दिल्ली एक शहर है' का निषेधन लिखिए।

**हल** $p$ का निषेधन निम्नलिखित प्रकार है:

$\sim p$ : नई दिल्ली एक शहर नहीं है।

या $\sim p$ : यह वस्तुस्थिति नहीं है कि नई दिल्ली एक शहर है।

या $\sim p$ : यह असत्य है, कि नई दिल्ली एक शहर है।

*किसी कथन $p$ के निषेधन $\sim p$ के सत्यमान के सम्बंध में निम्नलिखित नियम हैं-*

$(D_5)$ : $\sim p$ का सत्यमान $T$ होता है, जब-जब $p$ का सत्यमान F हो।

$(D_6)$ : $\sim p$ का सत्यमान $F$ होता है, जब-जब $p$ का सत्यमान T हो।

**उदाहरण 10** निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक के निषेधन का सत्यमान लिखिए:

(i) $p$ : प्रत्येक वर्ग एक आयत है।

(ii) $q$ : पृथ्वी एक तारा है।

(iii) $r : 2 + 3 < 4$

**हल** ($D_5$) तथा ($D_6$) को ध्यान में रखते हुए, हम देखते हैं, कि $\sim p$ का सत्यमान F है, क्योंकि $p$ का सत्यमान T है। इसी प्रकार $\sim q$ तथा $\sim r$ के सत्यमान T हैं, क्योंकि दोनों कथनों $q$ तथा $r$ के सत्यमान F हैं।

### 14.1.8 *संयुक्त कथनों के निषेधन*

**14.1.9 *संयोजन का निषेधन* :** स्मरण कीजिए कि संयोजन $p \wedge q$ दो घटक कथनों $p$ तथा $q$ से बना है, जिन दोनों का अस्तित्व एक साथ (simultaneously) होता है। अतः संयोजन के निषेधन का अर्थ, दो घटक कथनों में से कम से कम एक का निषेधन है।

($D_7$) : संयोजन $p \wedge q$ का निषेधन, $p$ के निषेधन तथा $q$ के निषेधन का वियोजन होता है। समतुल्यतः हम लिखते हैं, कि

$$\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$$

**उदाहरण 11** निम्नलिखित संयोजन में से प्रत्येक का निषेधन लिखिए:

(a) पेरिस फ्राँस में है और लन्दन इंगलैण्ड में है।

(b) $2 + 3 = 5$ और $8 < 10$.

**हल**

(a) मान लीजिए कि, $p$ : पेरिस फ्राँस में है तथा $q$ : लन्दन इंगलैण्ड में है। तो (a) में व्यक्त संयोजन $p \wedge q$ है।

अब $\sim p$ : पेरिस फ्राँस में नहीं है।

तथा $\sim q$ : लन्दन इंगलैण्ड में नहीं है।

अतएव ($D_7$), के प्रयोग से, $p \wedge q$ का निषेधन नीचे व्यक्त है:

$\sim (p \wedge q)$ : पेरिस फ्रांस में नहीं है या लन्दन इंगलैण्ड में नहीं है।

(b) यदि $p : 2 + 3 = 5$ तथा $q : 8 < 10$, तो (b) में दिया संयोजन $p \wedge q$ है।

अब $\sim p : 2 + 3 \neq 5$ तथा $\sim q : 8 \not< 10$, तब ($D_7$) के प्रयोग से, $p \wedge q$ का निषेधन निम्नलिखित है:

$-(p \wedge q) : (2 + 3 \neq 5)$ या $(8 \not< 10)$

**14.1.10 *वियोजन का निषेधन*** स्मरण कीजिए कि वियोजन $p \vee q$ दो घटक कथनों $p$ तथा $q$ से बना है, जो इस प्रकार हैं कि या तो $p$ या $q$ या दोनों का अस्तित्व है। इसलिए वियोजन के निषेधन का अर्थ $p$ तथा $q$ दोनों का ही एक साथ निषेधन है।

अत: प्रतीकात्मक रूप में

$(D_8)$ : वियोजन $p \vee q$ का निषेधन, $p$ के निषेधन तथा $q$ के निषेधन का संयोजन होता है। समतुल्यत: हम लिखते हैं, कि

$$\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

**उदाहरण 12** निम्नलिखित वियोजन में से प्रत्येक का निषेधन लिखिए:

(a) राम कक्षा X में है या रहीम कक्षा XII में है।

(b) 7, 4 से बड़ा है या 6, 7 से छोटा है।

**हल**

**(a)** मान लीजिए कि $p$ : राम कक्षा X में है तथा $q$ : रहीम कक्षा XII में है, तो *(a)* में व्यक्त वियोजन $p \vee q$ है।

अब $\sim p$ : राम कक्षा X में नहीं है।

$\sim q$ : रहीम कक्षा XII में नहीं है।

अतएव $(D_8)$ के प्रयोग से, $p \vee q$ का निषेधन निम्नलिखित है:

$\sim (p \vee q)$ : राम कक्षा X में नहीं है और रहीम कक्षा XII में नहीं है।

**(b)** मान लीजिए कि $p$ : 7, 4 से बड़ा है तथा $q$ : 6, 7 से छोटा है।

तब $(D_8)$ के प्रयोग से $p \vee q$ का निषेधन निम्नलिखित है:

$\sim (p \vee q)$ : 7 , 4 से बड़ा नहीं है और 6, 7 से छोटा नहीं है।

**14.1.11** ***निषेधन का निषेधन (Negation of a negation)*** जैसा कि पहले ही कहा जा चुका है कि निषेधन एक संयोजक नहीं है किंतु मात्र एक रूपांतरण (modifier) है। यह किसी प्रदत्त कथन को केवल रूपांतरित कर देता है तथा केवल एक अकेले (एकाकी) सरल या संयुक्त कथन पर लागू होता है। इसलिए, $(D_5)$ तथा $(D_6)$ को ध्यान में रखते हुए किसी कथन $p$ के लिए,

$(D_9)$ : किसी कथन के निषेधन का निषेधन स्वयं मूल कथन ही होता है। समतुल्यत: हम लिखते हैं कि,

$$\sim ( \sim p) = p$$

**14.1.12** ***सप्रतिबंध कथन (The conditional statement)*** स्मरण कीजिए कि, यदि $p$ तथा $q$ कोई दो कथन हों, तो **$p$ तथा $q$** को संयोजक ''यदि ...... तो'' द्वारा जोड़ने पर प्राप्त संयुक्त कथन ''यदि $p$ तो $q$'' को एक सप्रतिबंध कथन अथवा एक अंतर्भाव *(implication)* कहते हैं तथा इसे प्रतीकात्मक रूप में $p \rightarrow q$ अथवा $p \Rightarrow q$ लिखते हैं। यहाँ, $p$ को सप्रतिबंध कथन $(p \Rightarrow q)$ की परिकल्पना (hypothesis) अथवा पूर्वपद (anticedent) तथा $q$ को निष्कर्ष (conclusion) अथवा परपद (Consequent) कहते हैं।

*टिप्पणी : सप्रतिबंध कथन $p \Rightarrow q$ को अन्य अनेक प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है। इसके लिए प्रचलित कुछ अभिव्यक्तियाँ निम्नलिखित हैं:*

(a) यदि $p$, तो $q$.

(b) $q$ यदि $p$.

(c) $p$ केवल यदि $q$.

(d) $p$ पर्याप्त है $q$ के लिए।

(e) $q$ अनिवार्य है $p$ के लिए।

ध्यान दीजिए कि सप्रतिबंध कथन $p \rightarrow q$ इस बात को प्रकट करता है कि जब-जब यह ज्ञात है कि $p$ सत्य है, तब यह अर्थ अनिवार्यत: निकलता है कि $q$ भी सत्य है।

**उदारहण 13** निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक सप्रतिबंध कथन भी हैं:

(i) यदि $2 + 2 = 5$, तो रेखा को आइसक्रीम मिलेगी।

(ii) यदि आप रात्रि का भोजन (dinner) करेंगे, तो आपको मिष्ठान (dessert) मिलेगा।

(iii) यदि जॉन कठिन परिश्रम करता है, तो आज वर्षा होगी।

(iv) यदि ABC एक त्रिभुज है, तो $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

**उदारहण 14** कथन $p \rightarrow q$ को शब्दों में व्यक्त कीजिए, जहाँ

$p$ : आज वर्षा हो रही है।

$q : 2 + 3 > 4$

**हल** अभीष्ट सप्रतिबंध कथन निम्नलिखित है:

"यदि आज वर्षा हो रही है, तो $2 + 3 > 4$"

**14.1.13 *सप्रतिबंध कथन का प्रतिधनात्मक* (*Contrapositive of a conditional statement*)**

कथन "$(\sim q) \rightarrow (\sim p)$" को कथन $p \rightarrow q$ का प्रतिधनात्मक कथन कहते हैं।

**उदाहरण 15** निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक को उसके समतुल्य प्रतिधनात्मक रूप में लिखिए:

(i) यदि मेरी कार मरम्मत की दूकान में है, तो मैं बाजार नहीं जा सकता हूँ।

(ii) यदि करीम किले तक नहीं तैर सकता है, तो वह तैर कर नदी नहीं पार कर सकता है।

**हल** (i) मान लीजिए कि, "$p$ : मेरी कार मरम्मत की दुकान में है।" तथा "$q$ : मैं बाजार नहीं जा सकता हूँ।"

तब दिया हुआ कथन प्रतीकात्मक रूप में $p \rightarrow q$ है। अतएव इसका प्रतिधनात्मक कथन $\sim q \rightarrow \sim p$ है।

अब $\sim p$ : मेरी कार मरम्मत की दूकान में नहीं है। तथा

तथा $\sim q$ : मैं बाजार जा सकता हूँ।

अत: प्रदत्त कथन का प्रतिधनात्मक, निम्नलिखित है,

"यदि मैं बाजार जा सकता हूँ, तो मेरी कार मरम्मत की दुकान में नहीं है।"

(ii) (i) के हल के अनुसार सरल करने पर, कथन (ii) का प्रतिधनात्मक निम्नलिखित हैं:

"यदि करीम तैरकर नदी पार कर सकता है, तो वह किले तक तैर सकता है।"

**14.1.14 *सप्रतिबंध कथन का विलोम* (*Converse of a conditional statement*) :** सप्रतिबंध कथन "$q \rightarrow p$" को सप्रतिबंध कथन "$p \rightarrow q$" का विलोम कहते हैं।

**उदाहरण 16** निम्नलिखित कथनों का विलोम लिखिए:

(i) यदि $x < y$, तो $x + 5 < y + 5$

(ii) यदि ABC एक समबाहु त्रिभुज है, तो ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

**हल** (i) मान लीजिए कि,

$p : x < y$

$q : x + 5 < y + 5$

इसलिए कथन $p \to q$ का विलोम

"यदि $x + 5 < y + 5$, तो $x < y$" है।

(ii) प्रदत्त कथन का विलोम,

"यदि ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है तो ABC एक समबाहु त्रिभुज है।"

**14.1.15 *द्विप्रतिबंधित कथन (The biconditional statement)*** यदि दो कथन $p$ तथा $q$ संयोजक "यदि और केवल यदि" द्वारा जुड़े हों, तो परिणामी संयुक्त कथन "$p$ यदि और केवल यदि $q$", $p$ तथा $q$ का द्विप्रतिबन्धित कथन कहलाता है तथा इसे प्रतीकात्मक रूप में $p \leftrightarrow q$ लिखते हैं।

**उदाहरण 17** निम्नलिखित कथनों के द्विप्रतिबंधित कथन बनाइए:

$p$ : एक, सात से कम है।

$q$ : दो, आठ से कम है।

**हल** $p$ तथा $q$ का द्विप्रतिबन्ध (biconditional) निम्नलिखित है: "एक, सात से कम है, यदि और केवल यदि दो, आठ से कम है।"

**उदाहरण 18** निम्नलिखित द्विप्रतिबन्ध को प्रतीकात्मक रूप में परिवर्तित कीजिए:

"ABC एक समबाहु त्रिभुज है, यदि और केवल यदि, यह समकोणिक है।"

**हल** मान लीजिए कि, $p$ : ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

$q$ : ABC एक समकोणिक त्रिभुज है, तो प्रदत्त कथन प्रतीकात्मक रूप में $p \leftrightarrow q$ द्वारा व्यक्त होता है।

**14.1.16 परिमाणात्मक/मात्रात्मक वाक्यांश ( सूक्ति ) (*Quantifiers*)** "एक ऐसे का अस्तित्व है (there exists)" तथा "प्रत्येक के लिए (for every)- प्रकार के सूक्तियों को परिमाणात्मक वाक्यांश कहते हैं।

हमें अनेक ऐसे गणितीय कथन मिलते हैं जिनमें ये सूक्तियाँ होती हैं। उदाहरण के लिए निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए,

$p$ : प्रत्येक अभाज्य संख्या $x$ के लिए, $\sqrt{x}$ एक अपरिमेय संख्या है।

$q$ : एक ऐसे त्रिभुज का अस्तित्व है जिसकी सभी भुजाएँ बराबर (समान) हों।

**14.1.17 *कथनों की वैधता (Validity of statements)*** किसी कथन की वैधता का अर्थ यह जाँचने से है कि कब वह कथन सत्य है तथा कब असत्य है। यह इस बात पर निर्भर करता है कि उस कथन में कौन से संयोजक, परिमाणात्मक वाक्यांश तथा प्रतिबंध का प्रयोग किया गया है।

**(i) संयोजक 'और' से प्रयुक्त कथन की वैधता**

कथन $r : p \wedge q$ को सत्य प्रमाणित करने के लिये, सिद्ध कीजिए कि कथन $p$ सत्य है और कथन $q$ सत्य है।

**(ii) संयोजक 'या' से प्रयुक्त कथन की वैधता**

कथन $r : p \vee q$ को सत्य प्रमाणित करने के लिए, सिद्ध कीजिए कि या तो कथन $p$ सत्य है या कथन $q$ सत्य है।

**(iii) वाक्यांश ''यदि...... तो'' से प्रयुक्त कथन की वैधता**

कथन $r$ : "यदि $p$, तो $q$", की सत्यता प्रमाणित करने के लिए, हम निम्नलिखित विधियाँ अपना (adopt) सकते हैं:

**(a) प्रत्यक्ष विधि** : $p$ को सत्य मानिए और सिद्ध कीजिए कि $q$ सत्य है, अर्थात् $p \Rightarrow q$

**(b) प्रतिधनात्मक:** $\sim q$ को सत्य मानिए और सिद्ध कीजिए कि $\sim p$ सत्य है, अर्थात् $\sim q \Rightarrow \sim p$

**(c) विरोधोक्ति विधि** : $p$ को सत्य और $q$ को असत्य मानिए तथा मान्यता से एक विरोधोक्ति (Contradiction) प्राप्त कीजिए।

**(d) प्रत्युदाहरण द्वारा** : किसी दिए हुए कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए हम प्रत्युदाहरण (counter example) देते हैं। निम्नलिखित कथन पर विचार कीजिए,

"$r$ : सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।" अब $r$ असत्य है, क्योंकि संख्या 2 अभाज्य है और यह एक सम संख्या है।

**14.1.18 वाक्यांश ''यदि और केवल यदि'' से प्रयुक्त कथन की वैधता**

कथन "$r : p$ यदि और केवल यदि $q$" को सत्य प्रमाणित करने के लिए, हम निम्नलिखित प्रकार अग्रसर होते हैं,

**चरण (Step) 1:** सिद्ध कीजिए कि यदि $p$ सत्य है, तो $q$ सत्य है।

**चरण (Step) 2:** सिद्ध कीजिए कि यदि $q$ सत्य है, तो $p$ सत्य है।

## 14.2 हल किए हुये उदाहरण

### *लघुउत्तरीय प्रश्न*

**उदारहण 1** निम्नलिखित कथनों में से कौन संयुक्त कथन हैं?

(i) "2 एक सम संख्या और एक अभाज्य संख्या दोनों ही है।"

(ii) "9 न तो एक सम संख्या है न ही एक अभाज्य संख्या है।"

(iii) "राम और रहीम दोस्त हैं।"

**हल**

(i) प्रदत्त कथन को दो सरल कथनों "2 एक सम संख्या है" और "2 एक अभाज्य संख्या है" में विखंडित किया जा सकता है, जो संयोजक "और" द्वारा जुड़े हैं। अत: यह एक संयुक्त कथन है।

(ii) प्रदत्त कथन को निम्नलिखित दो सरल कथनों में विखंडित किया जा सकता है;
"9 एक सम संख्या नहीं है" और " 9 एक अभाज्य संख्या नहीं है", जो संयोजक "और" द्वारा जुड़े हैं। अत: यह एक संयुक्त कथन है।

(iii) प्रदत्त कथन को दो (या अधिक) सरल कथनों में विखंडित नहीं किया जा सकता है, इसलिए यह एक संयुक्त कथन नहीं है।

**उदारहण 2** निम्नलिखित संयुक्त कथनों में घटक कथनों तथा संयोजकों को पहचानिए:

(a) वर्षा हो रही है या सूर्य चमक रहा है।

(b) 2 एक धन संख्या या एक ऋण संख्या है।

**हल**

(a) घटक कथन निम्नलिखित हैं:

$p$ : वर्षा हो रही है।

$q$ : सूर्य चमक रहा है।

तथा संयोजक "या" है।

(b) घटक कथन निम्नलिखित हैं:

$p$ : 2 एक धन संख्या है।

$q$ : 2 एक ऋण संख्या है।

तथा संयोजक "या" है।

**उदाहरण 3** निम्नलिखित कथनों का प्रतीकात्मक रूप में अनुवाद कीजिए:

(i) 2 और 3 अभाज्य संख्याएँ हैं।

(ii) बाघ गिर वन या राजाजी राष्ट्रीय उद्यान में पाए जाते हैं।

**हल**

(i) प्रदत्त कथन निम्नलिखित प्रकार भी लिखा जा सकता है: "2 एक अभाज्य संख्या है और 3 एक अभाज्य संख्या है।"

मान लीजिए कि,

$p$ : 2 एक अभाज्य संख्या है।

$q$ : 3 एक अभाज्य संख्या है, तो दिया हुआ कथन प्रतीकात्मक रूप में $p \wedge q$ है।

(ii) दिया हुआ कथन निम्नलिखित प्रकार भी लिखा जा सकता है–

"बाघ गिर वन में पाए जाते हैं या बाघ राजाजी राष्ट्रीय उद्यान में पाए जाते हैं।"

मान लीजिए कि,

$p$ : बाघ गिर वन में पाए जाते हैं।

$q$ : बाघ राजाजी राष्ट्रीय उद्यान में पाए जाते हैं। तो प्रदत्त कथन प्रतीकात्मक रूप में $p \vee q$ है।

**उदाहरण 4** निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक का सत्यमान लिखिए:

(i) 9 एक सम पूर्णांक है या 9 + 1 सम है।

(ii) 2 + 4 = 6 या 2 + 4 = 7

(iii) दिल्ली भारत की राजधानी है और इस्लामाबाद पाकिस्तान की राजधानी है।

(iv) प्रत्येक आयत एक वर्ग है और प्रत्येक वर्ग एक आयत है।

(v) सूर्य एक तारा है या सूर्य एक ग्रह है।

**हल** $(D_1)$, $(D_2)$, $(D_3)$ तथा $(D_4)$ को ध्यान में रखते हुए, हम देखते हैं कि केवल कथन (iv) का सत्यामान F है, क्योंकि पहला घटक कथन, नामतः (namely), "प्रत्येक आयत एक वर्ग है।" असत्य है। पुनः, कथनों (i), (ii) तथा (v) में कम से कम एक घटक कथन सत्य है। अतएव इन कथनों का सत्य मान T है।

साथ ही कथन (iii) का सत्यमान T है, क्योंकि दोनों ही घटक कथन सत्य हैं।

**उदाहरण 5** कथन "हर (प्रत्येक) वह व्यक्ति जो भारत में रहता है, एक भारतीय है।" का निषेधन लिखिए।

**हल** मान लीजिए कि $p$ : हर (प्रत्येक) वह व्यक्ति जो भारत में रहता है, एक भारतीय है। इस कथन का निषेधन निम्नलिखित हैं:

$\sim p$ : यह असत्य है कि हर (प्रत्येक) वह व्यक्ति जो भारत में रहता है, एक भारतीय है

अथवा

$\sim p$ : प्रत्येक वह व्यक्ति जो भारत में रहता है, एक भारतीय नहीं है।

**उदाहरण 6** निम्नलिखित कथनों के निषेधन लिखिए:

(a) $p$ : सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।

(b) $q$ : 9 संख्या 4 का एक गुणज है।

(c) $r$ : किसी त्रिभुज की चार भुजाएँ होती हैं।

**हल**

(a) यहाँ $\sim p$ : यह असत्य है कि सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।

अथवा

$\sim p$ : एक ऐसे त्रिभुज का अस्तित्व है, जो समबाहु त्रिभुज नहीं है।

अथवा

$\sim p$ : सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज नहीं होते हैं।

(b) $\sim q$ : 9 संख्या 4 का एक गुणज नहीं है।

(c) $\sim r$ : यह असत्य है कि किसी त्रिभुज की चार भुजाएँ हैं।

अथवा

$\sim r$ : किसी त्रिभुज की चार भुजाएँ नहीं होती हैं।

**उदाहरण 7** निम्नलिखित कथनों के निषेधन लिखिए:

(i) सुरेश भोपाल में रहता है या वह मुम्बई में रहता है।

(ii) $x + y = y + x$ और 29 एक अभाज्य संख्या है।

**हल**

(i) मान लीजिए कि,

$p$ : सुरेश भोपाल में रहता है। तथा $q$ : सुरेश मुम्बई में रहता है। तब वियोजन $p \vee q$ है।

अब $\sim p$ : सुरेश भोपाल में नहीं रहता है।

$\sim q$ : सुरेश मुम्बई में नहीं रहता है।

इसलिए $(D_8)$ के प्रयोग द्वारा $p \vee q$ का निषेधन निम्नलिखित है,

$\sim (p \vee q)$ : सुरेश भोपाल में नहीं रहता है और वह मुम्बई में नहीं रहता है।

(ii) मान लीजिए कि, $p : x + y = y + x$ तथा $q$ : 29 एक अभाज्य संख्या है। तब संयोजन

(ii) $p \wedge q$ है।

अब $\sim p : x + y \neq y + x$ तथा $\sim q$ : 29 एक अभाज्य संख्या नहीं है।

अतएव $(D_7)$ के प्रयोग से, $p \wedge q$ का निषेधन निम्नलिखित है,

$\sim (p \wedge q) : x + y \neq y + x$ या 29 एक अभाज्य संख्या नहीं है।

**उदाहरण 8** निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक को सप्रतिबंध कथन के रूप में पुनः लिखिए:

(i) मोहन एक अच्छा विद्यार्थी होगा, यदि वह मेहनत से अध्ययन करे।

(ii) रमेश को डेज़र्ट (भोजनोपरांत मिष्ठान) मिलेगा, केवल यदि वह रात्रि-भोज करे।

(iii) जब आप गाते हैं, मेरे कानों को तकलीफ़ होती है।

(iv) भारतीय टीम के किसी क्रिकेट मैच को जीतने के लिए अनिवार्य प्रतिबंध है कि, चयन समिति एक हरफनमौला (all-rounder) खिलाड़ी का चयन करे।

(v) तारा को नई दिल्ली की सैर करने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध है कि, वह राष्ट्रपति भवन देखने जाए।

**हल**

(i) यह कथन "$q$ यदि $p$" के रूप का है, जहाँ

$p$ : मोहन मेहनत से अध्ययन करे।

$q$ : वह एक अच्छा विद्यार्थी होगा।

यह कथन, कथन ''यदि $p$, तो $q$'' का एक समतुल्य रूप है (टिप्पणी (b) 14.1.12)। अतएव, प्रदत्त कथन का समतुल्य सूचीकरण (formation) निम्नलिखित है,

"यदि मोहन मेहनत से अध्ययन करे, तो वह एक अच्छा विद्यार्थी होगा।"

(*यहाँ ध्यान दीजिए कि $p$ में 'वह' को मोहन से तथा $q$ में 'मोहन' को 'वह' से बदल दिया गया है।*)

(ii) प्रदत्त कथन "$p$ केवल यदि $q$" का एक समतुल्य रूप है (टिप्पणी (c) 14.1.12)। अतएव, दिए हुए कथन का समतुल्य सूत्रीकरण निम्नलिखित है, 'यदि रमेश रात्रि-भोज करे तो उसे डेज़र्ट मिलेगा।''

(iii) यहाँ 'जब' का अर्थ 'यदि' है और इस प्रकार प्रदत्त कथन का सूत्रीकरण नीचे दिया है,

''यदि आप गाते हैं, तो मेरे कानों को तकलीफ़ होती हैं।''

(iv) दिया हुआ कथन "$q$ का अनिवार्य है $p$ के लिए" के रूप में है, जहाँ

$p$ : भारतीय टीम किसी क्रिकेट मैच को जीतती है।

$q$ : चयन समिति एक हरफनमौला खिलाड़ी का चयन करती है। जो कथन ''यदि $p$, तो $q$'' का एक समतुल्य रूप है (टिप्पणी (e) 14.1.12)। अतएव, प्रदत्त कथन का समतुल्य सूत्रीकरण निम्नलिखित है,

''यदि भारतीय टीम किसी क्रिकेट मैच को जीतती है, तो चयन समिति ने एक हरफनमौला खिलाड़ी का चयन किया है।''

(v) दिया हुआ कथन "$p$ पर्याप्त है $q$ के लिए" के रूप का है, जहाँ

$p$ : तारा राष्ट्रपति भवन देखने जाती है।

$q$ : वह नई दिल्ली की सैर करती है, जो कथन ''यदि $p$, तो $q$" का एक समतुल्य रूप है (*टिप्पणी* ($d$) 14.1.12)। *अतः प्रदत्त कथन का समतुल्य सूत्रीकरण निम्नलिखित है, ''यदि तारा राष्ट्रपति भवन देखने जाती है, तो वह दिल्ली की सैर करती है।''*

**उदाहरण 9** कथन $p \rightarrow q$ है $q$ को हिन्दी भाषा में व्यक्त कीजिए? जहाँ

$p$ : आज वर्षा हो रही है।

$q : 2 + 3 > 4.$

**हल** सप्रतिबंध कथन नीचे दिया है,

"यदि आज वर्षा हो रही है, तो $2 + 3 > 4$".

**उदाहरण 10** निम्नलिखित कथन को प्रतीकात्मक रूप में लिखिए:

यदि $x = 7$ और $y = 4$" तो $x + y = 11$.

**हल** मान लीजिए कि. $p : x = 7$ और $y = 4$ तथा $q : x + y = 11$

तो प्रदत्त कथन प्रतीकात्मक रूप में $p \to q$ है।

**उदाहरण 11** निम्नलिखित कथनों का द्विप्रतिबंधित कथन लिखिए:

$p$ : आज अगस्त की 14 तारीख है।

$q$ : कल स्वतंत्रता दिवस है।

**हल** अभीष्ट द्विप्रतिबंधित कथन $p \leftrightarrow q$ निम्नलिखित है:

''आज अगस्त की 14 तारीख है यदि और केवल यदि कल स्वतंत्रता दिवस है।''

**उदारहण 12** निम्नलिखित द्विप्रतिबंधित कथन का प्रतीकात्मक रूप में अनुवाद कीजिए:

"ABC एक समबाहु त्रिभुज है यदि और केवल यदि इसका प्रत्येक अंत:कोण $60°$ का है।"

**हल** मान लीजिए कि, $p$ : ABC एक समबाहु त्रिभुज है तथा $q$ : इसका (त्रिभुज ABC का) प्रत्येक अंत:कोण $60°$ का है, तो प्रदत्त कथन प्रतीकात्मक रूप में $p \leftrightarrow q$ है।

**उदाहरण 13** परिमाणात्मक वाक्यांशों को पहिचानिए तथा निम्नलिखित कथनों के निषेधन लिखिए:

(i) एक ऐसी संख्या का अस्तित्व है, जो अपने वर्ग के बराबर (तुल्य) होता है।

(ii) सभी सम पूर्णांकों $x$ के लिए, $x^2$ भी सम होता है।

(iii) एक ऐसी संख्या का अस्तित्व है, जो 6 और 9 का गुणज है।

**हल** (i) परिमाणात्मक वाक्यांश ''एक ऐसे का अस्तित्व है'' तथा निषेधन निम्नलिखित है,

''ऐसी संख्या का अस्तित्व नहीं है, जो अपने वर्ग के बराबर (तुल्य) है।''

(ii) ''सभी के लिए'' परिमाणात्मक वाक्यांश है तथा इसका निषेधन निम्नलिखित है,

''एक ऐसे सम पूर्णांक $x$ का अस्तित्व है, इस प्रकार कि $x^2$ सम नहीं है।

(iii) ''एक ऐसे का अस्तित्व है'' परिमाणात्मक वाक्यांश है तथा निषेधन निम्नलिखित है,

''ऐसी किसी संख्या का अस्तित्व नहीं है, जो 6 और 9 दोनों ही का गुणज है।

**उदाहरण 14** सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य है:

$p$ : किसी भी वास्तविक संख्या $x$, $y$ के लिए यदि $x = y$, तो $2x + a = 2y + a$ जहाँ $a \in \mathbf{Z}$.

**हल** हम कथन $p$ को, प्रतिधनात्मक विधि तथा प्रत्यक्ष विधि द्वारा, सत्य सिद्ध करते हैं।

**प्रत्यक्ष विधि :** किसी भी वास्तविक संख्या $x$, $y$ के लिए दिया है कि,

$x = y$

$\Rightarrow \quad 2x = 2y$

$\Rightarrow \quad 2x + a = 2y + a$ किसी $a \in \mathbf{Z}$ के लिए।

**प्रतिधनात्मक विधि :** किसी वास्तविक संख्या $x$, $y$ के लिए कथन $p$ का प्रतिधनात्मक कथन निम्नलिखित है, यदि $2x + a \neq 2y + a$, तो $x \neq y$, जहाँ $x \in Z$.

दिया हुआ है कि $2x + a \neq 2y + a$

$\Rightarrow \quad 2x \neq 2y$

$\Rightarrow \quad x \neq y$

**उदाहरण 15** निम्नलिखित कथनों की वैधता की जाँच कीजिए:

(i) $r$ : संख्या 100, 4 और 5 का गुणज है।

(ii) $s$ : संख्या 60, 3 या 5 का गुणज है।

**हल** (i) मान लीजिए कि $p : r \wedge s$

जहाँ $r$ : "संख्या 100, 4 का गुणज है" सत्य है।

$s$ : "संख्या 100, 5 का गुणज है" सत्य है।

अत: $p$ सत्य है।

(ii) मान लीजिए कि, $q : r \vee s$, जहाँ

$r$ : "संख्या 60, 3 का गुणज है" सत्य है।

$s$ : "संख्या 60 ,5 का गुणज है" सत्य है।

अत: $q$ सत्य है।

## वस्तुनिष्ठ प्रश्न

*उदारहण 16 से 18 तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q.)*

**उदाहरण 16** निम्नलिखित में से कौन एक कथन है?

(A) गुलाब के फूल काले हैं।

(B) अपने कार्य पर ध्यान दीजिए।

(C) समयनिष्ठ (punctual) रहिए।

(D) झूठ मत बोलिए।

**हल** सही उत्तर (A) है, क्योंकि (B), (C) तथा (D) न तो सत्य है और न असत्य है। वास्तव में ये सभी वाक्य 'परामर्श' हैं'

**उदारहण 17** कथन ''वर्षा हो रही है और मौसम ठंडा है।''
का निषेधन निम्नलिखित में से कौन-सा है:

(A) वर्षा नहीं हो रही है और मौसम ठंडा है।

(B) वर्षा हो रही है या मौसम ठंडा नहीं है।

(C) वर्षा नहीं हो रही है या मौसम ठंडा नहीं है।

(D) वर्षा नहीं हो रही है और मौसम ठंडा नहीं है।

**हल** (C) सही उत्तर है, क्योंकि यह नियम $(D_7)$. को संतुष्ट करता है। विकल्प (A), (B), (D), $(D_7)$ को संतुष्ट नहीं करते हैं।

**उदाहरण 18** निम्नलिखित में से कौन-सा कथन ''यदि बिल्लू अच्छे अंक प्राप्त करेगा, तो उसे एक बाइसाईकल मिलेगी'' का विलोम है?

(A) यदि बिल्लू को बाईसाईकल नहीं मिलेगी, तो वह अच्छे अंक नहीं प्राप्त करेगा।

(B) यदि बिल्लू को बाईसाईकल मिलेगी, तो वह अच्छे अंक प्राप्त करेगा।

(C) यदि बिल्लू को बाईसाईकल मिलेगी, तो वह अच्छे अंक नहीं प्राप्त करेगा।

(D) यदि बिल्लू को बाईसाईकल नहीं मिलेगी, तो वह अच्छे अंक प्राप्त करेगा।

**हल** (B) सही उत्तर है, क्योंकि कथन $q \to p$ का विलोम कथन $p \to q$ है।

## 14.3 प्रश्नावली

### लघुउत्तरीय प्रश्न

1. *निम्नलिखित वाक्यों में से कौन से कथन है? औचित्य भी दीजिए:*
   (i) एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ होती हैं।
   (ii) 0 एक सम्मिश्र संख्या है।
   (iii) आसमान (आकाश) लाल है।
   (iv) प्रत्येक समुच्चय एक अपरिमित समुच्चय होता है।
   (v) $15 + 8 > 23$.
   (vi) $y + 9 = 7$.
   (vii) आपका बैग (थैला) कहाँ है?
   (viii) प्रत्येक वर्ग एक आयत होता है।
   (ix) किसी चक्रीय (cyclic) चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180° होता है।
   (x) $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$

2. *निम्नलिखित संयुक्त कथनों के घटक कथनों को ज्ञात कीजिए:*

(i) संख्या 7 अभाज्य और विषम है।

(ii) चेन्नई भारत में है और तमिलनाडू की राजधानी है।

(iii) संख्या 100, संख्याओं 3, 11 और 5 से भाज्य है।

(iv) चंडीगढ़, हरियाणा और यू.पी. की राजधानी है।

(v) $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है या एक अपरिमेय संख्या है।

(vi) 0 प्रत्येक धन पूर्णांक और प्रत्येक ऋण पूर्णांक से कम होता है।

(vii) पौधे प्रकाश संश्लेषण (photosynthesis) के लिए सूर्य के प्रकाश, पानी और कार्बन-डाईऑक्साइड का प्रयोग करते हैं।

(viii) किसी समतल में स्थित दो रेखाएँ या तो एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं या वे समांतर होती हैं।

(ix) एक आयत एक चतुर्भुज होता है या एक 5-भुजाओं का बहुभुज होता है।

3. *निम्नलिखित संयुक्त कथनों के घटक कथन लिखिए तथा जाँचिए कि वे सत्य हैं या असत्य हैं?*

(i) संख्या 57, 2 या 3 से भाज्य है।

(ii) संख्या 24, 4 और 6 का गुणज है।

(iii) सभी जीवित वस्तुओं की दो आँखें और दो पैर होते हैं।

(iv) 2 एक सम संख्या और एक अभाज्य संख्या है।

4. *निम्नलिखित सरल कथनों के निषेधन लिखिए :*

(i) संख्या 17, एक अभाज्य संख्या है।

(ii) $2 + 7 = 6$.

(iii) बैगनी रंग नीला होता है।

(iv) $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

(v) 2 एक अभाज्य संख्या है।

(vi) प्रत्येक वास्तविक संख्या एक अभाज्य संख्या है।

(vii) गाय के चार पैर होते हैं।

(viii) किसी लीप वर्ष में 366 दिन होते हैं।

(ix) सभी समरूप त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(x) किसी वृत्त का क्षेत्रफल, वृत्त की परिधि के समान होता है।

5. *निम्नलिखित कथनों का प्रतीकात्मक रूप में अनुवाद कीजिए :*

(i) राहुल ने हिंदी और अंग्रेज़ी विषयों में परीक्षा पास की।

(ii) $x$ और $y$ सम पूर्णांक हैं।

(iii) 2, 3 और 6 संख्या 12 के गुणनखण्ड हैं।

(iv) या तो $x$ या $x + 1$ एक विषम पूर्णांक है।

(v) एक संख्या या तो 2 या 3 से भाज्य है।

(vi) या तो $x = 2$ या $x = 3$, समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ का एक मूल है।

(vii) विद्यार्थीगण हिंदी या अंगरेज़ी को वैकल्पिक प्रश्नपत्र के रूप में ले (चुन) सकते हैं।

6. *निम्नलिखित संयुक्त कथनों के निषेधन लिखिए:*

(i) सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक और सम्मिश्र होती हैं।

(ii) सभी वास्तविक संख्याएँ परिमेय या अपरिमेय होती हैं।

(iii) $x = 2$ और $x = 3$, द्विघात समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ के मूल हैं।

(iv) किसी त्रिभुज की या तो 3-भुजाएँ या 4-भुजाएँ होती हैं।

(v) 35, एक भाज्य संख्या या एक अभाज्य संख्या है।

(vi) सभी अभाज्य पूर्णांक या तो सम होते हैं या विषम होते हैं।

(vii) $|x|$ या तो $x$ या $-x$ के बराबर (तुल्य) होता है।

(viii) संख्या 6, 2 और 3 से भाज्य है।

7. *निम्नलिखित कथनों को सप्रतिबंध कथनों के रूप में पुनः लिखिए:*

(i) किसी विषम संख्या का वर्ग विषम होता है।

(ii) रात्रि-भोज के उपरांत आपको स्वीट डिश मिलेगी।

(iii) आप फ़ेल (असफल) हो जायेंगे, यदि आप अध्ययन नहीं करेंगे।

(iv) किसी पूर्णांक का इकाई का अंक 0 या 5 होता है, यदि वह 5 से भाज्य होता है।

(v) किसी अभाज्य संख्या का वर्ग अभाज्य नहीं होता है।

(vi) $2b = a + c$, यदि $a$, $b$ और $c$ समांतर श्रेणी (A.P.) में हैं।

8. *द्विप्रतिबंध कथन $p \leftrightarrow q$, बनाइए, जहाँ*

(i) $p$ : किसी पूर्णांक का इकाई का अंक शून्य है।
$q$ : वह 5 से भाज्य है।

(ii) $p$ : एक प्राकृत संख्या $n$ विषम है।
$q$ : प्राकृत संख्या $n$, 2 से भाज्य नहीं है।

(iii) $p$ : एक त्रिभुज समबाहु त्रिभुज है।
$q$ : एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान हैं।

9. *निम्नलिखित कथनों के प्रतिधनात्म लिखिए:*

(i) यदि $x = y$ और $y = 3$, तो $x = 3$.

(ii) यदि $n$ एक प्राकृत संख्या है, तो $n$ एक पूर्णांक है।

(iii) यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान हैं, तो त्रिभुज समबाहु है।

(iv) यदि $x$ और $y$ ऋण पूर्णांक हैं, तो $xy$ धन है।

(v) यदि प्राकृत संख्या $n$, 6 से भाज्य है, तो $n$, 2 और 3 से भाज्य है।

(vi) यदि बर्फ़ गिर रही है, तो मौसम ठण्डा होगा।

(vii) यदि $x$ एक वास्तविक संख्या इस प्रकार है कि $0 < x < 1$, तो $x^2 < 1$.

10. *निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए:*

(i) यदि एक आयत 'R' एक वर्ग है, तो R एक समचतुर्भुज (rhombus) है।

(ii) यदि आज सोमवार है, तो कल मंगलवार होगा।

(iii) यदि आप आगरा जाएँ, तो आप ताजमहल निश्चित ही देखिए।

(iv) यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के वर्गों का योगफल उस त्रिभुज की तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर है, तो वह एक समकोण त्रिभुज है।

(v) यदि किसी त्रिभुज के तीनों कोण समान हैं, तो वह एक समबाहु त्रिभुज है।

(vi) यदि $x : y = 3 : 2$, तब $2x = 3y$.

(vii) यदि S एक चक्रीय चतुर्भुज है, तो S के सम्मुख कोण संपूरक हैं।

(viii) यदि $x$ शून्य है, तो $x$ न तो धन है और न ऋण है।

(ix) यदि दो त्रिभुज समरूप हैं, तो उनकी संगत भुजाओं का अनुपात समान है।

11. *निम्नलिखित कथनों में परिमाणात्मक वाक्यांशों को पहचानिए:*

(i) एक ऐसे त्रिभुज का अस्तित्व है, जो समबाहु नहीं है।

(ii) सभी वास्तविक संख्याओं $x$ और $y$ के लिए, $xy = yx$

(iii) एक ऐसी वास्तविक संख्या का अस्तित्व है, जो एक परिमेय संख्या नहीं है।

(iv) प्रत्येक प्राकृत संख्या $x$ के लिए, $x + 1$ भी एक प्राकृत संख्या है।

(v) सभी प्राकृत संख्याओं $x$ जहाँ $x > 3$, $x^2$ संख्या 9 से बड़ा है।

(vi) एक ऐसे त्रिभुज का अस्तित्व है, जो समद्विबाहु त्रिभुज नहीं है।

(vii) सभी ऋण पूर्णांक $x$ के लिए, $x^3$ भी एक ऋण पूर्णांक है।

(viii) उपर्युक्त कथनों में एक ऐसे कथन का अस्तित्व है, जो सत्य नहीं है।

(ix) 2 से भिन्न (अतिरिक्त) एक सम अभाज्य संख्या का अस्तित्व है।

(x) एक ऐसी वास्तविक संख्या $x$ का अस्तित्व है ताकि, $x^2 + 1 = 0$.

12. प्रत्यक्ष विधि द्वारा सिद्ध कीजिए कि किसी परिमेय संख्या '$n$' के लिए $n^3 - n$ सदैव सम है। [संकेत: दो दशाएँ (i) $n$ सम है, (ii) $n$ विषम है।]
13. निम्नलिखित कथनों की वैधता की जाँच कीजिए:
    (i) $p$ : संख्या 125, 5 और 7 से भाज्य है।
    (ii) $q$ : संख्या 131, 3 या 11 का गुणज है।
14. विरोधोक्ति विधि द्वारा निम्नलिखित कथन को सिद्ध कीजिए:
    $p$ : एक अपरिमेय संख्या और एक परिमेय संख्या का योगफल अपरिमेय होता है।
15. प्रत्यक्ष विधि द्वारा सिद्ध कीजिए कि किसी भी वास्तविक संख्या $x, y$ के लिए, यदि $x = y$, तो $x^2 = y^2$.
16. प्रतिधनात्मक विधि का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि यदि $n^2$ एक सम पूर्णांक है, तो $n$ भी एक सम पूर्णांक है।

## वस्तुनिष्ठ प्रश्न

*प्रश्न संख्या 17 से 36 तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q.)*

17. निम्नलिखित में से कौन एक कथन है?
    (A) $x$ एक वास्तविक संख्या है।
    (B) पंखे को बंद कर दीजिए।
    (C) 6 एक प्राकृत संख्या है।
    (D) मुझे जाने दीजिए।
18. निम्नलिखित में से कौन एक कथन नहीं है?
    (A) धूम्रपान स्वास्थ्य के लिए हानिकारक है।
    (B) $2 + 2 = 4$
    (C) केवल 2 एक सम अभाज्य संख्या है।
    (D) यहाँ आइए।
19. कथन "$2 + 7 > 9$ या $2 + 7 < 9$" में संयोजक है
    (A) और
    (B) या
    (C) $>$
    (D) $<$

20. कथन ''पृथ्वी सूर्य की परिक्रमा करती है और चंद्रमा, पृथ्वी का एक उपग्रह है।'' में संयोजक

(A) या

(B) पृथ्वी

(C) सूर्य

(D) और

21. कथन ''एक वृत्त, एक दीर्घवृत्त (ellipse) होता है।'' का निषेधन है:

(A) एक दीर्घवृत, एक वृत्त होता है।

(B) एक दीर्घवृत्त, एक वृत्त नहीं होता है।

(C) एक वृत्त, एक दीर्घवृत्त नहीं होता है।

(D) एक वृत्त, एक दीर्घवृत्त होता है।

22. कथन ''7, 8 से बड़ा है'' का निषेधन है:

(A) 7, 8 के बराबर है।

(B) 7, 8 से बड़ा नहीं है।

(C) 8, 7 से कम है।

(D) इनमें से कोई नहीं।

23. कथन ''72, 2 और 3 से भाज्य है।'' का निषेधन

(A) 72, 2 से भाज्य नहीं है या 72, 3 से भाज्य नहीं है।

(B) 72, 2 से भाज्य नहीं है और 72, 3 से भाज्य नहीं है।

(C) 72, 2 से भाज्य है और 72, 3 से भाज्य नहीं है।

(D) 72, 2 से भाज्य नहीं है और 72, 3 से भाज्य है।

24. कथन '' पौधे $CO_2$ ग्रहण करते हैं और $O_2$ छोड़ते हैं'' का निषेधन है:

(A) पौधे $CO_2$ नहीं ग्रहण करते हैं और $O_2$ नहीं छोड़ते हैं।

(B) पौधे $CO_2$ नहीं ग्रहण करते हैं या $O_2$ नहीं छोड़ते हैं।

(C) पौधे $CO_2$ ग्रहण करते हैं और $O_2$ नहीं छोड़ते हैं।

(D) पौधे $CO_2$ ग्रहण करते हैं या $O_2$ नहीं छोड़ते हैं।

25. कथन ''राजेश या रजनी बैंगलोर में रहते थे।'' का निषेधन है:

(A) राजेश बैंगलोर में नहीं रहता था या रजनी बैंगलोर में रहती है।

(B) रोजश बैंगलोर में रहता है और रजनी बैंगलोर में नहीं रहती थी।

(C) राजेश बैंगलोर में नहीं रहता था और रजनी बैंगलोर में नहीं रहती थी।

(D) राजेश बैंगलोर में नहीं रहता था या रजनी बैंगलोर में नहीं रहती थी।

26. कथन ''101, 3 का एक गुणज नहीं है।'' का निषेधन है:

(A) 101, 3 का एक गुणज है।

(B) 101, 2 का एक गुणज है।

(C) 101, एक विषम संख्या है।

(D) 101, एक सम संख्या है।

27. कथन ''यदि 7, 5 से बड़ा है तो 8, 6 से बड़ा है।'' का प्रतिधनात्मक कथन है:

(A) यदि 8, 6 से बड़ा है, तो 7, 5 से बड़ा है।

(B) यदि 8, 6 से बड़ा नहीं है, तो 7, 5 से बड़ा है।

(C) यदि 8, 6 से बड़ा नहीं है, तो 7, 5 से बड़ा नहीं है।

(D) यदि 8, 6 से बड़ा है, तो 7, 5 से बड़ा नहीं है।

28. कथन ''यदि $x > y$, तो $x + a > y + a$.'' का विलोम कथन है:

(A) यदि $x < y$, तो $x + a < y + a$.

(B) यदि $x + a > y + a$, तो $x > y$.

(C) यदि $x < y$, तो $x + a > y + a$.

(D) यदि $x > y$, तो $x + a < y + a$.

29. कथन ''यदि सूर्य नहीं चमक रहा है, तो आकाश बादलों से भरा (आच्छादित) है।'' का विलोम कथन है:

(A) यदि आकश बादलों से भरा है, तो सूर्य नहीं चमक रहा है।

(B) यदि सूर्य चमक रहा है, तो आकाश बादलों से भरा है।

(C) यदि आकाश साफ है, तो सूर्य चमक रहा है।

(D) यदि सूर्य नहीं चमक रहा है, तो आकाश बादलों से नहीं भरा है।

30. कथन ''यदि $p$, तो $q$'' का प्रतिधनात्मक कथन है:

(A) यदि $q$, तो $p$.

(B) यदि $p$, तो $\sim q$.

(C) यदि $\sim q$, तो $\sim p$.

(D) यदि $\sim p$, तो $\sim q$.

31. कथन ''यदि $x^2$ सम नहीं है, तो $x$ सम नहीं है'', निम्नलिखित कथनों में से किसका विलोम है,

(A) यदि $x^2$ विषम है, तो $x$ सम है।

(B) यदि $x$ सम नहीं है, तो $x^2$ सम नहीं है।

(C) यदि $x$ सम है, तो $x^2$ सम है।

(D) यदि $x$ विषम है, तो $x^2$ सम है।

32. कथन ''यदि चण्डीगढ़ पंजाब की राजधानी है, तो चण्डीगढ़ भारत में है।'' का प्रतिधनात्मक कथन

(A) यदि चण्डीगढ़ भारत में नहीं है, तो चण्डीगढ़ पंजाब की राजधानी नहीं है।

(B) यदि चण्डीगढ़ भारत में है, तो चण्डीगढ़ पंजाब की राजधानी है।

(C) यदि चण्डीगढ़ पंजाब की राजधानी नहीं है, तो चण्डीगढ़ भारत की राजधानी नहीं है।

(D) यदि चण्डीगढ़ पंजाब की राजधानी है, तो चण्डीगढ़ भारत में नहीं है।

33. निम्नलिखित में कौन सा सप्रतिबंध कथन $p \rightarrow q$ है?

(A) $q$ पर्याप्त है $p$ के लिए।

(B) $p$ अनिवार्य है $q$ के लिए।

(C) $p$ केवल यदि $q$.

(D) यदि $q$, तो $p$.

34. कथन ''3 और 4 का गुणनफल 9 है।'' का निषेधन है:

(A) यह असत्य है, कि 3 और 4 का गुणनफल 9 है।

(B) 3 और 4 का गुणनफल 12 है।

(C) 3 और 4 का गुणनपुल 12 नहीं है।

(D) यह असत्य है कि 3 और 4 का गुणनफल 9 नहीं है।

35. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन "एक (कोई) प्राकृत संख्या शून्य से बड़ी होती है।" का निषेधन नहीं है:

    (A) एक प्राकृत संख्या शून्य से बड़ी नहीं होती है।

    (B) यह असत्य है, कि एक प्राकृत संख्या शून्य से बड़ी होती है।

    (C) यह असत्य है कि एक प्राकृत संख्या शून्य से बड़ी नहीं होती है।

    (D) इनमें से कोई नहीं।

36. निम्नलिखित कथनों में से कौन एक संयोजन है?

    (A) राम और श्याम मित्र हैं।

    (B) राम और श्याम दोनों लम्बे हैं।

    (C) राम और श्याम दोनों शत्रु हैं।

    (D) इनमें से कोई नहीं।

37. बतलाइए कि क्या निम्नलिखित वाक्य, कथन हैं या नहीं हैं:

    (i) किसी त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सामने के कोण बराबर होते हैं।

    (ii) चंद्रमा, पृथ्वी एक उपग्रह है।

    (iii) ईश्वर आप पर कृपा करें।

    (iv) एशिया एक महाद्वीप है।

    (v) आप कैसे हैं?